Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS Électrotechnique

Épreuve de mathématiques - Groupement B

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Freinage d'un chariot et étude d'une fonction exponentielle** (12 questions) — **Page 3**
2. **Contrôle des tubes fluorescents et estimation de la conformité des rivets** (9 questions) — **Page 7**
3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btselectrotechnique.fr/assets/annales/bts-electrotechnique/E2 - Mathématiques/2022/BTS Électrotechnique - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot et étude d'une fonction exponentielle

Un chariot de fête foraine se déplace initialement à 20 m/s, puis son freinage est modélisé par une fonction vitesse solution d'une équation différentielle. Les questions portent sur cette fonction, ses variations et sa limite, la distance parcourue, son développement limité et la tangente à sa courbe.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle homogène (E_0) : y' + 0,8y = 0.

On utilise la formule de résolution de l'équation homogène $y' + ay = 0$, fournie dans le sujet. Ici, le coefficient est $a = 0,8$. La solution générale est donc une exponentielle de facteur $e^{-0,8t}$, multipliée par une constante réelle arbitraire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur l'intervalle considéré, les solutions sont $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. La fonction g est définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc $g'(t) = 0$. En substituant dans le membre de gauche de (E), on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. L'égalité est vérifiée pour tout $t \in [0; +\infty[$, ce qui confirme que g est une solution particulière de (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : $g(t) = 5$ vérifie l'équation (E), car $g'(t) + 0,8g(t) = 4$ pour tout $t \geq 0$.

Question 1. c. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La solution générale de l'équation avec second membre s'obtient en ajoutant une solution particulière à toutes les solutions de l'équation homogène associée. Ici, la solution particulière est $g(t) = 5$ et les solutions homogènes sont celles trouvées en 1.a.

1. Solution homogène : $ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.
2. Solution générale : $5 + ke^{-0,8t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'ensemble des solutions de (E) est donné par $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, où k parcourt $\mathbb{R}$.

Question 2. **Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

On part de la solution générale $f(t) = ke^{-0,8t} + 5$. À l'instant initial, $e^0 = 1$, donc la condition $f(0) = 20$ impose $k + 5 = 20$, soit $k = 15$. En remplaçant la constante dans la solution générale, on obtient la fonction recherchée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La solution vérifiant $f(0) = 20$ est $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, pour tout $t \geq 0$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. **Pour f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.**

Lorsque $t \to +\infty$, on a $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Par produit par la constante 15, $15e^{-0,8t} \to 0$. La fonction étant la somme de ce terme et de 5, sa limite est 5. Cela établit la limite demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La limite de la vitesse lorsque le temps tend vers l'infini est $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. **Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.**

Une fonction qui tend vers une limite finie en $+\infty$ possède une asymptote horizontale à cette valeur. La limite de $f(t)$ est 5 : la courbe C se rapproche donc de la droite horizontale d'ordonnée 5 lorsque le temps augmente.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'asymptote horizontale à la courbe C, en $+\infty$, a pour équation $y = 5$.

Question 2. **Sachant que, pour tout t de [0 ; +∞[, f'(t) = -12e$^{-0,8t}$, dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.**

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est positive. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$: la fonction est strictement décroissante. Elle vaut 20 en $t = 0$ et tend vers 5 quand $t \to +\infty$.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$		$-$
$f(t)$	20	$\searrow 5$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur $[0; +\infty[$, f décroît strictement de 20 vers sa limite 5.

Question 3. Le système de freinage permet-il au chariot de s'arrêter ?

La vitesse est strictement décroissante, mais elle tend vers 5 m/s et ne peut pas atteindre cette limite à un instant fini. En effet, pour tout $t \geq 0$, $15e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. Elle ne devient donc jamais nulle selon ce modèle.

- Vitesse limite : 5 m/s.
- Vitesse nulle : jamais atteinte.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le chariot ne s'arrête pas, car sa vitesse reste supérieure à 5 m/s et tend vers 5 m/s.

Question 4. a. La fonction F est définie sur [0 ; +∞[par F(t) = -18,75e$^{-0,8t}$ + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.

On dérive chaque terme de $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. Par la règle de dérivation d'une exponentielle composée, le premier terme donne $(-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} = 15e^{-0,8t}$, tandis que la dérivée de $5t$ vaut 5.

1. $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.
2. Cette expression est exactement $f(t)$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Comme $F'(t) = f(t)$, la fonction F est bien une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

Question 4. b. La distance parcourue entre les instants t_0 et t_1 est donnée par d = $\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$. Calculer la valeur exacte de la distance entre t_0 = 0 et t_1 = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

Par le théorème fondamental de l'analyse, la distance entre 0 et 1 vaut $F(1) - F(0)$. En remplaçant les bornes, on obtient $(-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. L'évaluation de cette expression donne environ $15,3251$ mètres.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La distance exacte est $23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m, soit $15,33$ m au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. Question à choix multiples, une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée. Recopier l'expression correcte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro parmi : 20 - 12t + 24/5 t² + ε(t), avec $\lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$; 20 + 24/5 t² ; ou 20 - 12t + 4,8t² + t²ε(t), avec $\lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Le développement limité à l'ordre 2 indiqué dans le sujet a pour partie régulière $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Le reste doit être un terme négligeable devant t^2, donc s'écrire $t^2\varepsilon(t)$ avec $\varepsilon(t) \to 0$. Parmi les trois propositions, seule la troisième possède ce reste et reprend les bons coefficients.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La réponse exacte est $20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)(t - 0)$. On lit $f(0) = 20$, et l'expression de la dérivée donne $f'(0) = -12e^0 = -12$. En substituant ces valeurs dans l'équation de la tangente, on obtient la droite demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Au point d'abscisse 0, l'équation de la tangente est $y = 20 - 12t$.

2. Contrôle des tubes fluorescents et estimation de la conformité des rivets

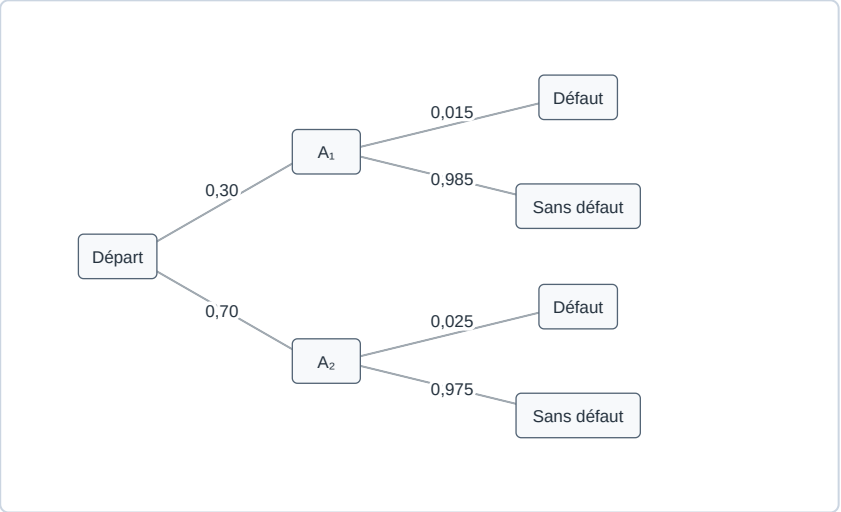
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers, avec des proportions de production et des taux de défaut différents. L'exercice étudie les probabilités liées au contrôle, la durée de vie des tubes par une loi exponentielle et l'estimation de la proportion de rivets conformes par intervalle de confiance.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. L'atelier 1 produit 30 % des tubes, dont 1,5 % présentent un défaut. L'atelier 2 produit 70 % des tubes, dont 2,5 % présentent un défaut. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation.

Le premier niveau de l'arbre distingue les deux ateliers, selon leur part de production. Depuis chacun, on sépare les tubes défectueux des tubes sans défaut. Les probabilités des deux branches issues de chaque atelier sont complémentaires : le taux de non-défectueux vaut 1 moins le taux de défaut. Les probabilités inscrites sur les branches du second niveau sont donc conditionnelles à l'atelier choisi.

Arbre pondéré des ateliers et des défauts



Les branches du second niveau donnent les probabilités conditionnelles dans chaque atelier.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Branches : atelier 1 : 0,30 ; atelier 2 : 0,70. Puis défaut / sans défaut : 0,015 / 0,985 depuis A_1 et 0,025 / 0,975 depuis A_2.

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D), où A₁ désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

Le chemin correspondant à l'événement recherché passe d'abord par l'atelier 1, puis par la branche « défaut ». La probabilité d'un chemin complet est le produit des probabilités de ses branches :
$P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P(D \mid A_1) = 0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$.
Cette probabilité est exprimée parmi l'ensemble des tubes produits, et non parmi les seuls tubes de l'atelier 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0{,}0045$, soit 0,45 %.

Question 3. Montrer que P(D) = 0,0195, valeur indiquée dans l'énoncé. Cette valeur imprimée semble en contradiction avec les données des ateliers.

Les événements « atelier 1 » et « atelier 2 » forment une partition de la production. La formule des probabilités totales donne donc :
$P(D) = 0{,}30 \times 0{,}015 + 0{,}70 \times 0{,}025 = 0{,}0045 + 0{,}0175 = 0{,}022$.
Le calcul confirme la valeur manuscrite 0,0220 visible sur la page, tandis que la valeur imprimée 0,0195 est incompatible avec les taux et les parts de production indiqués.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(D) = 0{,}022$, soit 2,2 %. La valeur imprimée 0,0195 est incohérente.

Question 4. Sachant que le tube choisi ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.

On cherche $P(A_2 \mid \overline{D})$. Parmi toute la production, la probabilité d'obtenir un tube de l'atelier 2 sans défaut vaut $0{,}70 \times 0{,}975 = 0{,}6825$. La probabilité d'obtenir un tube sans défaut, tous ateliers confondus, est $1 - 0{,}022 = 0{,}978$. On divise la première probabilité par la seconde pour tenir compte de l'information « sans défaut ».

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0{,}698$, soit environ 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. La variable aléatoire T associe à chaque tube sa durée de bon fonctionnement en heures et suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,0001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance est $E(T) = \frac{1}{\lambda}$. En utilisant le paramètre donné, $\lambda = 0{,}0001$, on obtient $E(T) = \frac{1}{0{,}0001} = 10\,000$ heures. Cette espérance décrit la durée moyenne de bon fonctionnement sur un grand nombre de tubes ; elle ne signifie pas que chaque tube fonctionnera exactement pendant cette durée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$E(T) = 10\,000$ heures, durée moyenne de bon fonctionnement.

Question 2. **Calculer, avec un arrondi au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

La page donne $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Pour une variable continue, les probabilités en $< 8\,000$ et en $\leq 8\,000$ sont égales. Avec $\lambda = 0{,}0001$, l'exposant vaut $-0{,}0001 \times 8\,000 = -0{,}8$, donc $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0{,}8} \approx 0{,}5507$. On arrondit ensuite au centième demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T < 8\,000) \approx 0{,}55$.

Question 3. **Calculer, avec un arrondi au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.**

La probabilité de dépasser t est le complément de celle de terminer avant ou à t : $P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = e^{-\lambda t}$. Pour $t = 10\,000$ heures et $\lambda = 0{,}0001$, on obtient $P(T > 10\,000) = e^{-0{,}0001 \times 10\,000} = e^{-1} \approx 0{,}3679$. L'arrondi au centième donne le résultat demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T > 10\,000) \approx 0{,}37$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. **Un échantillon aléatoire de 1 000 rivets contient 975 rivets conformes. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p de rivets conformes dans la production.**

L'estimation ponctuelle de la proportion de rivets conformes est la fréquence observée dans l'échantillon. Sur les 1 000 rivets prélevés, 975 sont conformes :
$f = \frac{975}{1\,000} = 0{,}975$.
Cette fréquence estime la proportion inconnue de rivets conformes dans l'ensemble de la production. En pourcentage, elle correspond à 97,5 %.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f = 0{,}975$, soit 97,5 %.

Question 2. **En utilisant la formule fournie pour l'intervalle de confiance d'une proportion au niveau de confiance de 95 %, déterminer un intervalle centré sur f pour p. Arrondir les bornes au millième.**

La formule fournie donne l'intervalle centré sur f :
$\left[f - 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \; ; \; f + 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right]$.
On remplace par la fréquence observée $f = 0{,}975$ et la taille d'échantillon $n = 1\,000$. Les bornes calculées sont

environ 0,965323 et 0,984677 ; chacune est arrondie au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0{,}965\ ;\ 0{,}985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, code 22MATGRB1, durée 2 heures. Le coefficient est 2, sauf en Traitement des matériaux où il est 3. Les deux exercices étudient le freinage d'un chariot et le contrôle de tubes fluorescents et de rivets, en mobilisant équations différentielles, fonctions exponentielles, intégration, probabilités et intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' + ay = b$, la solution générale est la somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène.
- Si $f(t)$ tend vers une limite finie L quand t tend vers $+\infty$, la courbe admet l'asymptote horizontale $y = L$.
- Pour T de loi exponentielle de paramètre λ, $E(T) = 1/\lambda$ et $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
- Pour une fréquence f observée sur n éléments, l'intervalle fourni est $[f - 1{,}96\sqrt{f(1-f)/n} ; f + 1{,}96\sqrt{f(1-f)/n}]$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale à la solution générale pour déterminer la constante.
- Pour décider si le chariot s'arrête, examiner si la vitesse tend vers zéro, et non seulement si elle diminue.
- Distinguer $P(A \cap D)$ d'une probabilité conditionnelle et utiliser les données des deux ateliers.
- Respecter les unités et les arrondis demandés, et interpréter les résultats dans le contexte.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment trouver la solution de l'équation différentielle avec la condition initiale ?

Résolvez d'abord l'équation homogène, puis ajoutez une solution particulière de l'équation complète. Remplacez ensuite t par 0 et imposez $f(0) = 20$ pour déterminer la constante.

Q : Comment déterminer si le chariot finit par s'arrêter selon le modèle ?

Étudiez la limite de sa vitesse lorsque le temps tend vers l'infini. Ici, cette limite vaut 5 m/s et non zéro : le modèle ne prévoit donc pas que le chariot s'arrête.

Q : Comment organiser le temps et répartir les points pendant cette épreuve ?

L'épreuve dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points chacun. Les trois parties de chaque exercice peuvent être traitées indépendamment, ce qui permet de passer à une autre partie si nécessaire.

Q : Quels éléments faut-il soigner pour obtenir les points des questions ?

Présentez les calculs et justifications demandés, identifiez clairement les événements en probabilités, puis respectez les unités et les arrondis indiqués. Pour la question sur P(D), signalez l'écart entre la valeur imprimée et les données.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btselectrotechnique.fr/assets/annales/bts-electrotechnique/E2 - Mathématiques/2022/BTS Électrotechnique - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Électrotechnique : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.