Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS Électrotechnique

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 pour Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot en freinage (12 questions) **Page 3**

2. Transformées de Laplace d'un système électrique entrée-sortie (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btselectrotechnique.fr/assets/annales/bts-electrotechnique/E2 - Mathématiques/2022/BTS Électrotechnique - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation et étude de la vitesse d’un chariot en freinage

Un chariot de fête foraine, lancé à 20 m·s⁻¹, est ralenti par un système de freinage et sa vitesse est modélisée par une fonction f. L’exercice étudie cette fonction par une équation différentielle, ses variations, une intégrale représentant la distance parcourue et un développement limité.

Partie A - Résolution d’une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre sur l’intervalle indiqué l’équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.

La formule des solutions de l’équation homogène $y' + ay = 0$ donne, avec $a = 0,8$, une famille de solutions définies sur $[0; +\infty[$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}, \quad k \in \mathbb{R}.$

Question 1.b. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = 5 est solution de l’équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ vérifie $g'(t) = 0$. Ainsi, $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$, ce qui est bien le membre de droite de l’équation.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $g(t) = 5$ est solution de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1.c. Déduire l’ensemble des solutions de l’équation différentielle y' + 0,8y = 4.

Une solution particulière est $g(t) = 5$. On lui ajoute les solutions de l’équation homogène associée, qui sont de la forme $ke^{-0,8t}$, avec k réel.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5, \quad k \in \mathbb{R}.$

Question 2. Déterminer la solution f de l’équation différentielle qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

Dans la famille précédente, la condition initiale impose $f(0) = k + 5 = 20$, puisque $e^0 = 1$. On obtient donc $k = 20 - 5 = 15$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5.$

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

On a $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Quand t tend vers $+\infty$, $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t}$ tend vers 0. Le terme exponentiel disparaît dans la limite.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote, puis en donner une équation.

> La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut 5. La courbe représentative de f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. À partir de l'expression donnée de f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et sa limite en $+\infty$ vaut 5.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour tout temps fini $t \geq 0$, le terme exponentiel est strictement positif :

- $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$;
- la vitesse n'atteint donc jamais 0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : le chariot ne s'arrête pas. Sa vitesse tend vers $5\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Question 4.a. Vérifier que la fonction F(t) = -18,75e$^{-0,8t}$ + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

En dérivant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, la dérivée de l'exponentielle composée apporte le facteur $-0,8$: $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$. Ainsi, F est bien une primitive de f.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4.b. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre t = 0 et t = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

1. La distance cherchée est $d = F(1) - F(0)$.
2. En utilisant l'expression de F, on obtient $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$.
3. L'arrondi au centimètre donne la distance demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Parmi les expressions proposées, recopier celle qui correspond au développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Le polynôme de Taylor affiché est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ quand $t \to 0$. La bonne proposition est donc celle qui comporte ce reste.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t), \quad \lim_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0.$

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. On a $f(0) = 20$ et $f'(0) = -12e^0 = -12$. La tangente passe donc par $(0; 20)$ et son coefficient directeur est -12.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = 20 - 12t.$

2. Transformées de Laplace d’un système électrique entrée-sortie

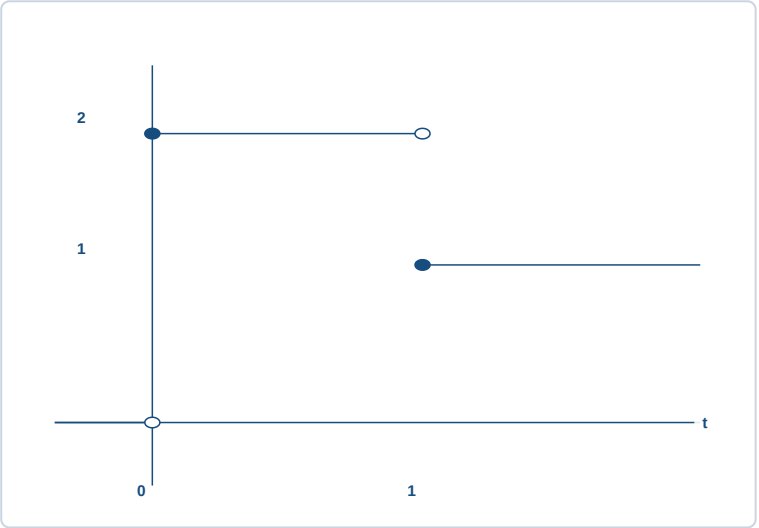
Un système électrique reçoit un signal causal exprimé avec la fonction échelon unité et produit un signal de sortie. La fonction de transfert relie leurs transformées de Laplace ; il faut représenter le signal d’entrée, calculer les transformées et déterminer puis représenter la sortie.

Partie A - Signal d’entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de e(t) = 2U(t) - U(t - 1).

Par définition, $U(t) = 0$ pour $t < 0$ et $U(t) = 1$ dès $t = 0$. Ainsi, $e(t) = 0$ avant zéro, puis $e(0) = 2$. Pour $0 \leq t < 1$, le second échelon est nul et $e(t) = 2$. À partir de $t = 1$, il vaut 1, donc $e(t) = 1$. Le tracé indique les sauts avec des points ouverts et pleins aux extrémités concernées.

Signal d’entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ si $t < 0$, $e(t) = 2$ si $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d’entrée.

La transformée de Laplace est linéaire. Le formulaire donne $\mathcal{L}\{U(t)\} = 1/p$ et, pour un retard d’une unité, $\mathcal{L}\{U(t-1)\} = e^{-p}/p$. On applique ces deux formules à $e(t) = 2U(t) - U(t-1)$, en conservant les coefficients de chaque échelon.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2}{p} - \frac{e^{-p}}{p} = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. À partir de la relation S(p) = H(p) × E(p), démontrer l'expression S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/[p(p + 1)]]e⁻ᵖ donnée dans le sujet.

On utilise $S(p) = H(p)E(p)$, avec $H(p) = 1/(p+1)$ et $E(p) = 2/p - e^{-p}/p$. En multipliant chaque terme de $E(p)$ par $1/(p+1)$, on obtient directement la somme des deux fractions demandées.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier l'égalité 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

Mettons au même dénominateur les deux fractions du membre de droite. Le numérateur devient $(p+1) - p = 1$, et le dénominateur est $p(p+1)$. L'égalité est donc vérifiée pour les valeurs de p où les fractions sont définies.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{(p+1)-p}{p(p+1)} = \frac{1}{p(p+1)}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de (1/p)e⁻ᵖ et de [1/(p + 1)]e⁻ᵖ.

On lit les deux premières transformées dans le formulaire : l'inverse de $1/p$ est l'échelon unité, et celui de $1/(p+1)$ est $e^{-t}U(t)$. Le facteur e^{-p} correspond à un retard d'une unité : on remplace alors t par $t-1$ et on multiplie par $U(t-1)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\mathcal{L}^{-1}(1/p) = U(t)$, $\mathcal{L}^{-1}(1/(p+1)) = e^{-t}U(t)$, $\mathcal{L}^{-1}(e^{-p}/p) = U(t-1)$, $\mathcal{L}^{-1}(e^{-p}/(p+1)) = e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire l'expression du signal de sortie s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

La décomposition $1/[p(p+1)] = 1/p - 1/(p+1)$ permet d'inverser la transformée. La partie sans retard devient $2(1-e^{-t})U(t)$. Le terme multiplié par e^{-p} est retardé d'une unité et s'annule sur $[0;1[$, car $U(t-1) = 0$ pour $t < 1$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1-e^{-t})$.

Question 5.a. **À partir de l'expression s(t) = (e - 2)e⁻ᵗ + 1 donnée sur [1 ; +∞[, calculer s(1), en donnant sa valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.**

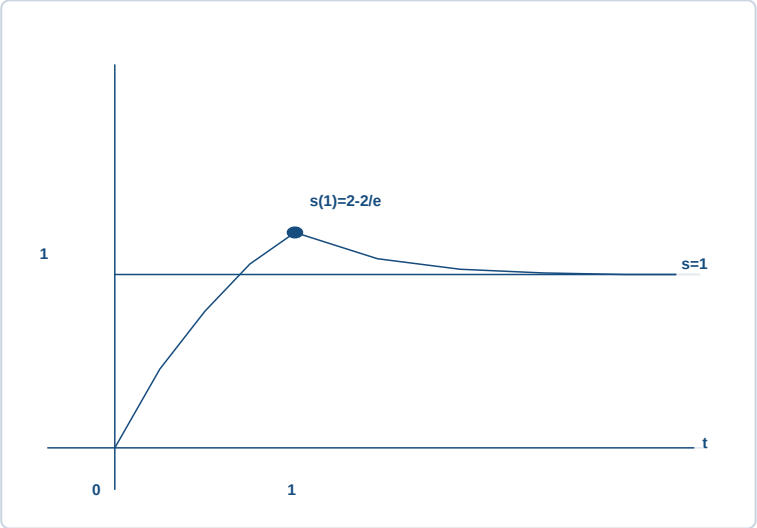
On évalue l'expression valable pour $t \geq 1$ en $t = 1$: $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$. Comme $e\,e^{-1} = 1$, cela se simplifie en $2 - 2/e$. Cette valeur est environ $1,264$, donc son arrondi au dixième est $1,3$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1,3.$

Question 5.b. **Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de s.**

Sur $[0;1[$, $s(t) = 2(1-e^{-t})$ croît de 0 à $2 - 2/e$. Pour $t \geq 1$, $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$ décroît à partir de cette même valeur et tend vers 1. La courbe présente donc un maximum en $t = 1$, puis se rapproche de l'asymptote horizontale $s = 1$.

Courbe du signal de sortie s(t)



> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe part de $(0,0)$, atteint son maximum $(1, 2-2/e)$, puis décroît vers $s = 1$.

Question 5.c. **Donner la limite de s(t) lorsque t tend vers +∞.**

Pour $t \geq 1$, on a $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, e^{-t} tend vers zéro. Le terme exponentiel disparaît donc et la limite est le terme constant.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, groupement B, code 22MATGRB2, d'une durée de 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Le sujet étudie le freinage d'un chariot et la réponse d'un système électrique, en mobilisant équations différentielles, analyse de fonctions, intégration et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$; une solution particulière permet ensuite de résoudre l'équation avec second membre.
- Pour $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, la limite en $+\infty$ vaut 5 et l'asymptote horizontale est $y = 5$.
- La distance parcourue entre t_0 et t_1 est $d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$; on l'évalue avec une primitive aux deux bornes.
- La transformée de $f(t - a)U(t - a)$ est $F(p)e^{-ap}$: le facteur exponentiel traduit un décalage temporel de a.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les signes et les unités dans l'équation différentielle et l'interprétation de f comme vitesse.
- Distinguer une vitesse qui tend vers 5 $m \cdot s^{-1}$ d'une vitesse qui tend vers zéro : le chariot ne s'arrête pas dans ce modèle.
- Évaluer la primitive dans l'ordre borne supérieure moins borne inférieure, puis arrondir la distance au centimètre.
- Pour le signal de sortie, traiter séparément les intervalles avant et après $t = 1$ et appliquer correctement le décalage.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle de la vitesse ?

On résout d'abord l'équation homogène, dont les solutions sont $ke^{-0,8t}$. On ajoute une solution particulière constante pour le second membre, puis on utilise $f(0) = 20$ afin de déterminer la constante.

Q : Comment savoir si le chariot s'arrête à partir de la limite de sa vitesse ?

Pour que le chariot s'arrête selon le modèle, sa vitesse doit tendre vers zéro. Ici, f(t) tend vers 5 $m \cdot s^{-1}$, une valeur strictement positive : le chariot ralentit, mais ne s'arrête pas.

Q : Comment organiser les calculs de l'exercice sur les transformées de Laplace ?

Transformez séparément les échelons du signal d'entrée, puis calculez $S(p) = H(p)E(p)$. Décomposez les fractions simples, appliquez les transformées inverses et tenez compte du facteur e^{-p} pour le décalage à $t = 1$.

Q : Que faut-il vérifier pour le développement limité et la tangente ?

À l'ordre 2, le développement limité comprend les termes jusqu'à t^2 et un reste négligeable devant t^2. Pour la tangente en zéro, l'ordonnée à l'origine est $f(0)$ et la pente est $f'(0)$.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btselectrotechnique.fr/assets/annales/bts-electrotechnique/E2 - Mathématiques/2022/BTS Électrotechnique - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Électrotechnique : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.