Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS Électrotechnique

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22-MATGRD1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1 en Analyses de biologie médicale et Biotechnologies ; 2 en Bio analyses et contrôles et Bioqualité ; 1,5 en Europlastics et composites**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation de l’évolution du nombre de personnes équipées d’un implant médical (13 questions) **Page 3**

2. Défaut d’approvisionnement, pannes et qualité de l’embouteillement (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btselectrotechnique.fr/assets/annales/bts-electrotechnique/E2 - Mathématiques/2022/BTS Électrotechnique - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

1. Modélisation de l’évolution du nombre de personnes équipées d’un implant médical

Dans un pays de 60 millions d’habitants, des données de 2013 à 2021 décrivent le nombre de personnes équipées d’un implant médical. Deux modèles sont étudiés : un ajustement exponentiel et un modèle fondé sur une équation différentielle.

Partie A

Question 1. Compléter le tableau de l’annexe à rendre avec la copie en calculant les valeurs transformées avec le changement de variable y = ln(N - 30). Arrondir au millième.

On applique le changement de variable à chaque effectif du tableau : **y = ln(N - 30)**. Les effectifs N sont exprimés en milliers et les valeurs obtenues sont arrondies au millième.

Année	Rang k	N (milliers)	y
2013	0	56,25	3,268
2014	1	58,1	3,336
2015	2	60,5	3,418
2016	3	63	3,497
2017	4	65,8	3,578
2018	5	68,7	3,656
2019	6	72	3,738
2020	7	75,5	3,818
2021	8	79,3	3,898

✓ RÉPONSE À RETENIR

y : 3,268 ; 3,336 ; 3,418 ; 3,497 ; 3,578 ; 3,656 ; 3,738 ; 3,818 ; 3,898.

Question 2.a. À l’aide de la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d’ajustement du nuage de points Mi(ki ; yi), sous la forme y = ak + b. Arrondir les coefficients a et b au centième.

La régression linéaire des neuf points (k_i ; y_i) par la méthode des moindres carrés donne une pente d’environ 0,0794 et une ordonnée à l’origine d’environ 3,2605. En arrondissant chacun des coefficients au centième, la pente vaut 0,08 et l’ordonnée à l’origine vaut 3,26.

✓ RÉPONSE À RETENIR

y = 0,08k + 3,26.

Question 2.b. **À partir de l'équation de la droite d'ajustement, déduire que le nombre de personnes équipées de l'implant, exprimé en milliers en fonction du rang k, peut être modélisé par N(k) = 30 + 26,05e^(0,08k).**

Comme $y = \ln(N - 30)$, on a $N - 30 = e^y$. En remplaçant y par l'équation d'ajustement, on obtient $N(k) = 30 + e^{0,08k + 3,26} = 30 + e^{3,26}e^{0,08k}$. Or $e^{3,26} \approx 26,05$ à deux décimales : les effectifs sont exprimés en milliers.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $N(k) = 30 + 26,05e^{0,08k}$, en milliers.

Question 3.a. **En supposant que le modèle reste valide, déterminer au millier près le nombre de personnes équipées de l'implant en 2026.**

Le rang de 2026 est $k = 2026 - 2013 = 13$. Avec le modèle fourni, $N(13) = 30 + 26,05e^{0,08 \times 13} \approx 103,70$ milliers. L'arrondi au millier près correspond à 104 milliers de personnes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> 104 000 personnes.

Question 3.b. **Si le nombre d'habitants du pays reste stable à long terme, déterminer si le modèle étudié reste valide et justifier la réponse.**

Lorsque k tend vers $+\infty$, $e^{0,08k}$ tend vers $+\infty$. Le modèle implique donc que N(k) augmente sans borne. Il finirait par prévoir plus de personnes équipées que d'habitants dans le pays, dont la population est supposée rester stable à 60 millions.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le modèle prévoit à long terme un nombre d'équipés sans limite, incompatible avec une population stable de 60 millions.

Partie B

Question 1.a. **Résoudre sur $[0 ; +\infty[$ l'équation différentielle homogène (E_0) : $y' + 0,05y = 0$.**

L'équation homogène s'écrit $y' = -0,05y$. Une fonction exponentielle de taux -0,05 vérifie cette relation. Ainsi, sur l'intervalle demandé, toutes les solutions sont obtenues en faisant varier la constante réelle C.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(x) = Ce^{-0,05x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. **Déterminer une solution constante de l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

Pour une solution constante y = c, sa dérivée est nulle. L'équation devient alors 0,05c = 0,05, d'où c = 1. Cette constante fournit une solution particulière de (E).

✓ RÉPONSE À RETENIR

Une solution constante est y = 1.

Question 1.c. **Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

La solution constante 1 est une solution particulière de (E). Toute solution de cette équation s'obtient en lui ajoutant une solution de l'équation homogène associée, résolue à la question précédente.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(x) = 1 + Ce^{-0,05x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.d. **En utilisant g(0) = 8, déduire une expression de la fonction g sur [0 ; +∞[.**

On utilise la solution générale $g(t) = 1 + Ce^{-0,05t}$ et la condition initiale g(0) = 8. Comme $e^0 = 1$, on obtient 1 + C = 8, donc C = 7.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$g(t) = 1 + 7e^{-0,05t}$.

Question 2. **Avec le modèle f(t) = 450/(1 + 7e^(-0,05t)), déterminer au millier près le nombre de personnes équipées de l'implant en 2026. Le temps t est mesuré en années depuis 2013.**

En 2026, t = 2026 - 2013 = 13. On calcule $f(13) = 450/(1 + 7e^{-0,05 \times 13}) \approx 96,684$ milliers. En arrondissant au millier près, le modèle prévoit 97 000 personnes équipées.

✓ RÉPONSE À RETENIR

97 000 personnes.

Question 3. **Déterminer la limite de f en +∞ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

Lorsque t tend vers +∞, $e^{-0,05t}$ tend vers 0. Le dénominateur de f(t) tend donc vers 1 et f(t) tend vers 450. Comme f est exprimée en milliers de personnes, le modèle prévoit une stabilisation à 450 000 personnes équipées.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La limite est 450, soit 450 000 personnes équipées.

Question 4. **À partir de l'expression de f'(t) obtenue par logiciel de calcul formel, déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.**

Pour tout t ≥ 0, le numérateur $315e^{-0,05t}$ de f'(t) est strictement positif. Son dénominateur $2(1 + 7e^{-0,05t})^2$ l'est également. Ainsi f'(t) > 0 sur [0 ; +∞[: selon le modèle, le nombre de personnes équipées augmente avec le temps.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est strictement croissante : le nombre de personnes équipées augmente.

Question 5. **Déterminer à partir de quelle année le nombre de personnes équipées de l'implant dépassera 120 000, soit 120 milliers, et expliquer la méthode employée.**

Résoudre f(t) > 120 revient à obtenir $450/(1 + 7e^{-0,05t}) > 120$, soit $t > -\ln(11/28)/0,05 \approx 18,69$. Le seuil est donc franchi au cours de 2031. Si l'on retient les années entières correspondant à t entier, la première année où le nombre dépasse 120 000 est 2032.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Seuil franchi au cours de 2031 ; première année entière au-dessus de 120 000 : 2032.

2. Défaut d'approvisionnement, pannes et qualité de l'embouteillement

Dans une usine, une machine à embouteiller est alimentée par un réservoir d'eau et une file d'entrée de bouteilles vides. L'exercice porte sur les défauts d'approvisionnement, les pannes de la machine et l'évaluation de son réglage à partir des volumes mesurés sur un échantillon.

Partie A - Défaut d'approvisionnement

Question Association. Associer les quatre phrases du tableau de gauche à l'information correspondante du tableau de droite : probabilité que la file ne se vide pas ; événement où la file se vide mais pas le réservoir ; probabilité que la file et le réservoir soient tous deux vides au moins une fois ; probabilité d'un défaut d'approvisionnement. Pour chaque réponse, écrire le numéro de la phrase et la lettre associée. Aucune justification n'est demandée.

Phrase	Association
1	E
2	C
3	F
4	D

✓ RÉPONSE À RETENIR

1-E ; 2-C ; 3-F ; 4-D.

Partie B - Pannes de la machine sur 200 jours

Question 1. La probabilité d'une panne un jour donné est 0,025 et les jours de panne sont indépendants. Donner, sans justification, la loi de probabilité suivie par X, nombre de jours de panne sur 200 jours consécutifs, et préciser ses paramètres.

Sur chacun des 200 jours, la panne constitue une épreuve de probabilité 0,025, indépendante des autres. Le nombre de jours de panne suit donc une loi binomiale.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$X \sim \mathcal{B}(200; 0{,}025)$.

Partie B - Approximation par une loi de Poisson

Question 2.a. La loi de X est approchée par une loi de Poisson de paramètre λ. Justifier que λ = 5.

1. Pour l'approximation par une loi de Poisson, le paramètre est le produit du nombre de jours par la probabilité de panne : $\lambda = 200 \times 0{,}025 = 5$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lambda = 5$.

Question 2.b. **Pour Y suivant la loi de Poisson de paramètre 5, donner P(Y ≤ 10), arrondie à 10^{-3}.**

Pour une loi de Poisson de paramètre 5, on additionne les probabilités de 0 à 10 : $P(Y \leq 10) = \sum_{k=0}^{10} e^{-5}\frac{5^k}{k!}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(Y \leq 10) \approx 0{,}986$.

Question 2.c. **Le graphique suggère que P(Y = 15) est égale à 0. En utilisant la formule fournie pour P(Y = k), déterminer si cette conjecture est vraie ou fausse et justifier.**

La formule donne :

$$P(Y = 15) = \frac{5^{15}e^{-5}}{15!}.$$

Cette valeur est strictement positive, même si elle est trop petite pour être visible sur le graphique.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La conjecture est fausse : $P(Y = 15) \approx 0{,}000157 > 0$.

Partie C - Qualité de l'embouteillement

Question 1. **À l'aide de la calculatrice et du tableau des volumes mesurés et de leurs effectifs pour les 100 bouteilles, déterminer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart type σ de l'échantillon. Arrondir l'écart type à 10^{-2}.**

La moyenne pondérée vaut $\bar{x} = \frac{73\times17+74\times20+75\times43+76\times13+77\times7}{100} = 74{,}73$. L'écart type calculé à partir des effectifs est $\sigma = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\bar{x} = 74{,}73$ cL et $\sigma \approx 1{,}10$ cL.

Partie C - Test bilatéral

Question 2.a. **Pour le test bilatéral H_0 : m = 75 contre H_1 : m ≠ 75, déterminer un réel h tel que P(75 - h ≤ Z ≤ 75 + h) ≈ 0,95, à 10^{-2} près. Sous H_0, Z suit une loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,11.**

1. La loi normale centrée contenant 95 % des valeurs s'étend à environ 1,96 écarts types de part et d'autre de son espérance. Ainsi, $h = 1{,}96 \times 0{,}11 = 0{,}2156$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$h \approx 0{,}22$ cL.

Question 2.b. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de confiance de 95 %.

Au seuil de 5 %, l'intervalle d'acceptation est centré sur 75 cL et a pour demi-largeur $h \approx 0{,}22$ cL.

- Accepter H_0 si la moyenne observée appartient à $[74{,}78 ; 75{,}22]$.
- Sinon, rejeter H_0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Accepter H_0 si $\bar{x} \in [74{,}78 ; 75{,}22]$, sinon la rejeter.

Question 2.c. À partir des résultats de l'échantillon donné, déterminer si l'hypothèse H_0 : m = 75 peut être acceptée.

La moyenne observée est de 74,73 cL, sous la borne basse de l'intervalle d'acceptation, soit 74,78 cL. Elle n'appartient donc pas à cet intervalle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

On rejette H_0 : la moyenne observée est hors de l'intervalle d'acceptation.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS Groupement D1, session 2022, code 22-MATGRD1, d'une durée de deux heures, avec un coefficient variable selon la spécialité. Elle porte sur deux modèles d'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical et sur une machine à embouteiller. Les compétences évaluées couvrent ajustement, équations différentielles, probabilités, lois usuelles, statistiques descriptives et tests d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Le changement y = ln(N - 30) transforme le modèle exponentiel en relation affine, ajustable par la méthode des moindres carrés.
- Pour y' + ay = c, la solution générale est la somme d'une solution constante et de la solution générale de l'équation homogène.
- Le nombre de pannes sur n jours indépendants, avec une probabilité p chaque jour, suit une loi binomiale B(n ; p) ; l'approximation de Poisson a pour paramètre λ = np.
- Pour un test bilatéral normal à 95 %, l'intervalle d'acceptation est centré sur la moyenne supposée et contient une probabilité de 0,95.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités et les arrondis demandés : implant en milliers, écart type au centième et probabilités au millième.
- Pour l'ajustement, utiliser y = ln(N - 30) et associer correctement chaque année à son rang k.
- Une probabilité de Poisson peut être très petite sans être nulle ; vérifier avec la formule avant de conclure.
- Pour le test, comparer la moyenne observée à l'intervalle d'acceptation et conclure dans le contexte du réglage.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment passer du changement de variable au modèle exponentiel ?

Après l'ajustement y = ak + b, remplacer y par ln(N - 30), puis exponentier : N - 30 = e^(ak+b). On obtient N = 30 + e^b e^(ak).

Q : Comment choisir le paramètre de l'approximation de Poisson ?

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'approximation de Poisson utilise λ = np. Ici, il y a 200 jours et une probabilité de panne de 0,025, donc λ = 5.

Q : Le sujet indique-t-il le même coefficient pour toutes les spécialités ?

Non. Le coefficient est 1 en Analyses de biologie médicale et Biotechnologies, 2 en Bio analyses et contrôles et Bioqualité, et 1,5 en Europlastics et composites.

Q : Sur quoi repose la décision du test de réglage ?

On détermine l'intervalle centré sur 75 qui contient 95 % des moyennes sous H_0. Si la moyenne observée appartient à cet intervalle, on ne rejette pas H_0 ; sinon, on la rejette.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btselectrotechnique.fr/assets/annales/bts-electrotechnique/E2 - Mathématiques/2022/BTS Électrotechnique - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

Ressources BTS Électrotechnique : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.