Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS Électrotechnique

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (12 questions) **Page 3**

2. Série de Fourier d’une fonction paire périodique (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btselectrotechnique.fr/assets/annales/bts-electrotechnique/E2 - Mathématiques/2023/BTS Électrotechnique - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance f(t), exprimée en centimètres, entre le fond du meuble et le fond du tiroir est étudiée pendant la fermeture, avec t en secondes. La première partie utilise une équation différentielle et des conditions initiales ; la seconde examine les variations, l’algorithme de fermeture et la position moyenne.

Partie A

Question 1. a. Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

Pour l’équation du second degré, on calcule le discriminant : $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Il est positif, donc l’équation possède deux racines réelles distinctes. La formule $r = \frac{-5 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ donne les deux valeurs recherchées.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> Les deux racines de l’équation caractéristique sont $r = -1$ et $r = -4$.

Question 1. b. À l’aide du tableau fourni, résoudre l’équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.

1. Les racines de l’équation caractéristique sont réelles et distinctes : $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$.
2. Le tableau fourni associe à ce cas une solution générale de la forme $y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$, où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2. a. À partir de la position initiale du tiroir et de sa vitesse initiale, déterminer f(0) et f'(0).

La fonction f représente la distance OM, en centimètres. À l’instant initial, le point M se trouve à 20 cm de O : cette distance donne la valeur de $f(0)$. La vitesse initiale est la dérivée de cette distance par rapport au temps ; le signe négatif indique que la distance diminue pendant la fermeture.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2. b. Sachant que f(t) = (70/3)e^(-t) - (10/3)e^(-4t), déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

La distance demandée correspond à la valeur de la fonction à l’instant $t = 2$ secondes. On remplace donc t par 2 dans l’expression admise, sans arrondir les exponentielles : $f(2) = \frac{70}{3} e^{-2} - \frac{10}{3} e^{-8}$. La distance est exprimée en centimètres.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La distance exacte après deux secondes est $\frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2. c. Le tiroir est considéré fermé lorsque OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si l'affirmation du constructeur, selon laquelle le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, est correcte et justifier.

Il suffit de calculer la distance à l'instant 4 s et de la comparer au seuil de fermeture. On obtient $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,427$ cm. Comme cette valeur est inférieure à 0,5 cm, le tiroir est déjà fermé à 4 s. La décroissance stricte de f garantit qu'il a franchi le seuil avant cet instant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui, l'affirmation est correcte : le seuil de 0,5 cm est franchi avant 4 secondes.

Partie B

Question 1. a. En utilisant la limite rappelée de e^(-u) lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.

La fonction est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, les quantités t et $4t$ tendent elles aussi vers $+\infty$. D'après la limite rappelée, chacun des deux termes exponentiels tend vers zéro ; leur combinaison tend donc vers zéro.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1. b. En déduire une équation de l'asymptote à la courbe représentative de f.

Une courbe représentative admet une asymptote horizontale lorsque la fonction tend vers une limite finie à l'infini. Ici, la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ vaut zéro. L'équation de cette asymptote est donc la droite horizontale passant par l'origine du repère.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'asymptote horizontale à la courbe est la droite d'équation $y = 0$.

Question 2. a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme séparément en utilisant $(e^{u(t)})' = u'(t)e^{u(t)}$. Ainsi, $(e^{-t})' = -e^{-t}$ et $(e^{-4t})' = -4e^{-4t}$. En tenant compte du signe moins devant le second terme de f, sa dérivée apporte un terme positif.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2. b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.

La dérivée est strictement négative sur l'intervalle étudié : la fonction est donc strictement décroissante. À la borne gauche, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$. À l'autre extrémité, sa limite vaut zéro. Le tableau traduit ces deux valeurs et le sens de variation.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	$\searrow$ 0

✓ RÉPONSE À RETENIR

Sur $[0; +\infty[$, f décroît strictement de 20 vers 0.

Question 3. a. Compléter le tableau de suivi de l'algorithme à partir de la ligne 36, en ajoutant des lignes si nécessaire, avec les valeurs de t, de f(t) arrondies au centième et de la condition testée, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

À chaque passage dans la boucle, t augmente de 0,1. Le test compare alors $f(t)$ à 0,5 ; la boucle s'arrête dès que la condition devient fausse. Les valeurs de la fonction sont arrondies au centième, comme le demande le tableau du sujet.

Ligne	t **(s)**	$f(t)$**, au centième**	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le test devient faux à la ligne 39 : l'algorithme s'arrête pour $t = 3,9$ s.

Question 3. b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.

À $t = 3,8$, la distance vaut environ 0,522 cm : elle reste supérieure au seuil de 0,5 cm, donc la boucle continue. Au passage suivant, $t = 3,9$ et la distance vaut environ 0,472 cm. Le test est alors faux ; l'algorithme s'arrête et le tiroir répond au critère de fermeture.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La valeur finale est $t = 3,9$ s ; le tiroir est alors fermé selon le critère donné.

Question 4. La position moyenne est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e^(-4) + (5/24)e^(-16).

Une primitive de $f(t)$ est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. En évaluant aux bornes puis en divisant par 4, on obtient $m = \frac{1}{4}\left(F(4) - F(0)\right)$. Le regroupement des termes constants et exponentiels donne bien l'expression demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16} \approx 5,5182$ cm.

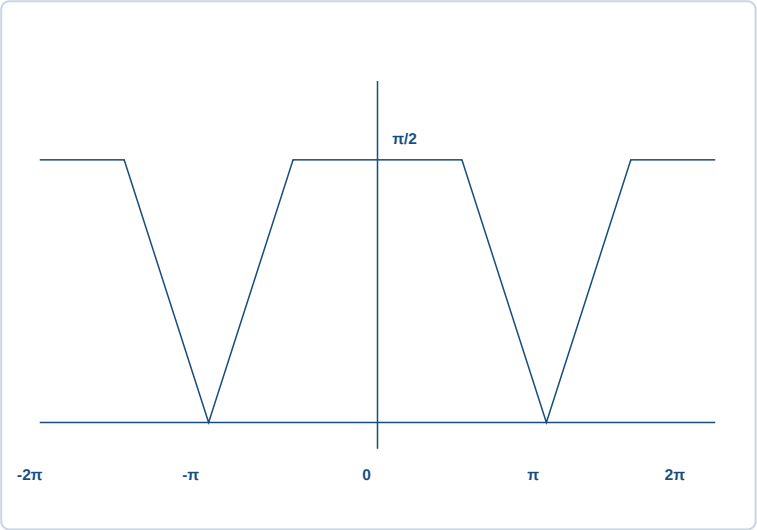
2. Série de Fourier d’une fonction paire périodique

On étudie une fonction paire de période 2π, définie par morceaux sur [0 ; π], puis représentée sur [-2π ; 2π]. Les questions portent sur ses coefficients de Fourier, sa somme partielle d’ordre 3, les courbes proposées et l’approximation de sa valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l’intervalle [-2π ; 2π], en utilisant sa définition par morceaux ainsi que ses propriétés de périodicité et de parité.

Sur un motif de période 2π, la fonction vaut $\pi/2$ entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, puis décroît ou croît linéairement jusqu’à 0 en π ou $-\pi$. La parité réfléchit le motif de part et d’autre de l’axe vertical, et la périodicité le répète. Le tracé ci-dessous reprend ces niveaux et ces points de raccordement sur $[-2\pi; 2\pi]$.

Représentation de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe paire et périodique de période 2π, avec $f(\pm\pi) = 0$ et $f(0) = f(\pm 2\pi) = \pi/2$.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

Le coefficient sinus est donné par une intégrale de $f(t)\sin(nt)$ sur une période. Comme f est paire et que $\sin(nt)$ est impaire, leur produit est impair. Son intégrale sur l’intervalle symétrique $[-\pi; \pi]$ est donc nulle. Cette intégrale sur une période a la même valeur que celle calculée sur $[0; 2\pi]$, puisque l’intégrande est périodique de période 2π. Ainsi, tous les coefficients sinus s’annulent.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$b_n = 0$ pour tout entier $n \geq 1$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.

La relation du formulaire entre la période T et la pulsation est $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Le sujet donne une période de 2π. En remplaçant directement cette valeur, on obtient $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. La pulsation est exprimée en radians par unité de temps, ici en radians par unité de t.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\omega = 1$.

Question 4. Démontrer que le coefficient de Fourier a₀ est égal à 3π/8.

Le coefficient constant est la valeur moyenne de f sur une période. Comme f est paire, on peut calculer $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$. Sur $[0;\pi/2]$, l'aire est celle d'un rectangle de largeur et hauteur $\pi/2$. Sur $[\pi/2;\pi]$, elle est celle d'un triangle de base et de hauteur $\pi/2$. Leur somme, divisée par π, donne le coefficient demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, aₙ = ∫₀^(π/2) cos(nt)dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π - t)cos(nt)dt.

Le formulaire donne, pour une fonction paire, $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$. Ici, $T = 2\pi$ et $\omega = 1$, donc $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. On sépare l'intégrale en $\pi/2$, où $f(t) = \pi/2$, puis où $f(t) = \pi - t$. Le premier facteur devient 1, ce qui donne l'égalité demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$.

Question 6. Sachant que aₙ = 2/(πn²) (cos(nπ/2) - cos(nπ)), déterminer les valeurs exactes de a₁, a₂ et a₃.

On utilise la formule donnée et les valeurs des cosinus aux angles concernés. Pour $n = 1$, la différence vaut $\cos(\pi/2) - \cos(\pi) = 1$. Pour $n = 2$, elle vaut $\cos(\pi) - \cos(2\pi) = -2$. Pour $n = 3$, elle vaut $\cos(3\pi/2) - \cos(3\pi) = 1$. En appliquant à chacune le facteur $\frac{2}{\pi n^2}$, on obtient les trois coefficients exacts.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_1 = \frac{2}{\pi}, \quad a_2 = -\frac{1}{\pi}, \quad a_3 = \frac{2}{9\pi}$.

Question 7. En déduire l'expression de la somme partielle $s_3(t)$ donnée dans le sujet.

La somme partielle d'ordre 3 est la somme du terme constant et des termes de rang 1, 2 et 3. D'après la question 2, les coefficients en sinus sont nuls. On remplace alors les coefficients constants et les trois coefficients en cosinus par leurs valeurs établies aux questions précédentes. Avec la convention du formulaire, le terme constant est bien a_0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t)$.

Question 8. Indiquer sans justification laquelle des trois courbes proposées correspond à la fonction s_3.

La somme partielle est paire et périodique de période 2π. Son maximum est situé autour de $t = 0$, tandis qu'elle présente ses minima autour de $t = -\pi$ et $t = \pi$. Parmi les trois tracés du sujet, la courbe numéro 3 présente ces caractéristiques. Les deux autres ne correspondent pas à l'allure de la somme partielle donnée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Courbe numéro 3.

Question 9. a. Pour $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.

On remplace les coefficients par leurs valeurs exactes : $P = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2}{9\pi}\right)^2\right]$. La somme des termes entre crochets vaut $\frac{409}{81\pi^2}$. Ainsi, $P = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{409}{162\pi^2}$, puis l'arrondi à quatre décimales donne la valeur demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P \approx 1{,}6437$.

Question 9. b. Sachant que $F^2 = \pi^2/6$ et que P constitue une approximation de F^2, choisir parmi 0,1 %, 1 % et 10 % le pourcentage d'erreur de cette approximation. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

L'erreur relative de l'approximation se calcule en comparant P à la valeur exacte $F^2 = \frac{\pi^2}{6}$, puis en divisant l'écart par F^2 et en multipliant par 100. Avec la valeur de P trouvée à la question précédente, le pourcentage obtenu est d'environ $0{,}074\,\%$. Parmi les trois choix proposés, il correspond à $0{,}1\,\%$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> 0,1 %.

SYNTHÈSE DE L'ÉPREUVE & RÉFÉRENTIEL • BTS ÉLECTROTECHNIQUE

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, code 23MATGRB2, dure 2 heures et propose deux exercices notés chacun sur 10 points. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Le sujet étudie la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et fonction, puis les séries de Fourier d'une fonction paire.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y'' + 5y' + 4y = 0, l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$ permet de déterminer la solution générale.
- La distance du tiroir est f(t) = (70/3)e^(-t) - (10/3)e^(-4t), en centimètres, avec t exprimé en secondes.
- Pour une fonction paire, les coefficients b_n sont nuls et $a_n = (4/T)\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)dt$.
- La somme partielle de Fourier s_n conserve a_0 et les termes $a_k\cos(k\omega t)$ et $b_k\sin(k\omega t)$ jusqu'au rang n.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités du modèle : t est en secondes et la distance du tiroir en centimètres.
- Dans le tableau de l'algorithme, suivre chaque incrément de t et arrondir f(t) au centième.
- Distinguer la période T de la pulsation ω et exploiter la parité de la fonction pour les coefficients de Fourier.
- Pour l'erreur relative, comparer P à F^2, puisque P approche F^2, et utiliser la valeur de référence fournie.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment utiliser les conditions initiales pour déterminer la fonction décrivant le tiroir ?

La distance initiale fournit f(0), et la vitesse initiale fournit f'(0). Remplacez ces deux valeurs dans la solution générale de l'équation différentielle pour déterminer les constantes, puis utilisez l'expression obtenue pour répondre aux questions.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice sur les séries de Fourier ?

La fonction f est paire et sin(nωt) est impaire. Leur produit est donc impair ; son intégrale sur un intervalle symétrique est nulle, ce qui entraîne $b_n = 0$ pour tout n supérieur ou égal à 1.

Q : Comment répartir mon temps et que sait-on du barème par question ?

L'épreuve dure 2 heures et les deux exercices valent chacun 10 points. Le sujet ne précise pas la répartition des points entre les questions ; prévoyez du temps pour les deux exercices et une vérification finale.

Q : Quelles consignes de justification faut-il respecter dans cet exercice ?

Justifiez les résultats lorsque le sujet le demande, notamment pour les démonstrations et l'affirmation du constructeur. La question de choix de courbe demande une réponse sans justification, et le QCM final précise qu'aucune justification n'est demandée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btselectrotechnique.fr/assets/annales/bts-electrotechnique/E2 - Mathématiques/2023/BTS Électrotechnique - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Électrotechnique : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.